

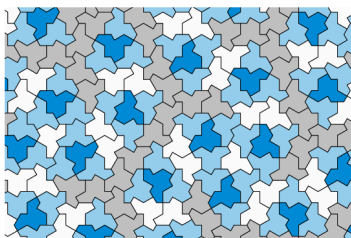
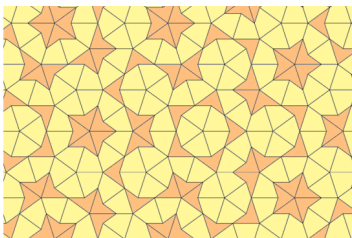
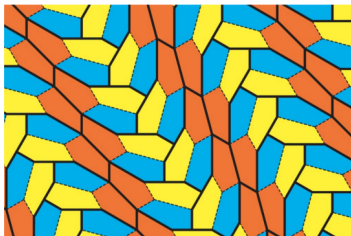
Pavages d'espaces exotiques

Nicolas Tholozan

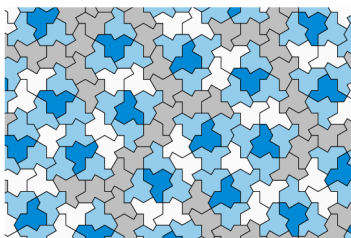
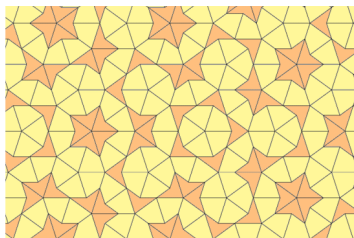
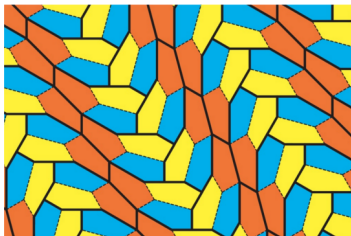
CNRS / ÉNS Paris

Π -day, 2026

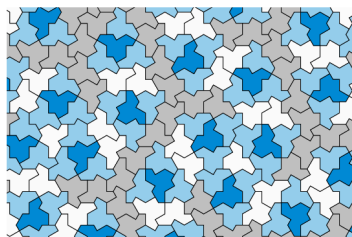
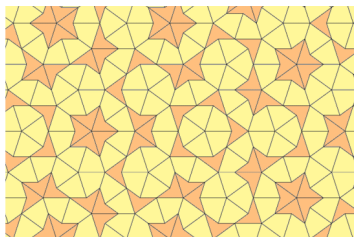
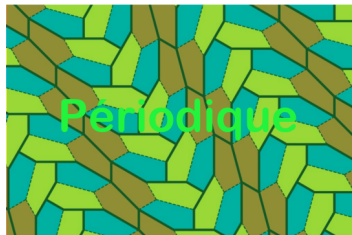
Pavages du plan euclidien



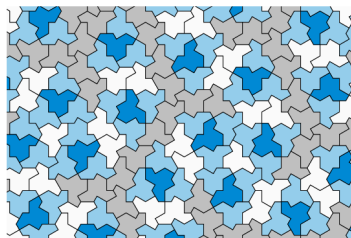
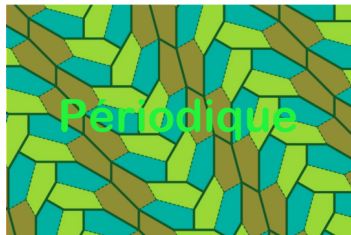
Pavages du plan euclidien



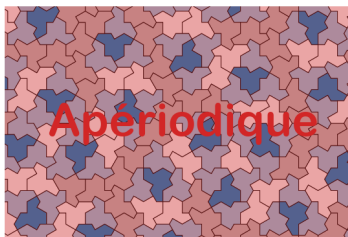
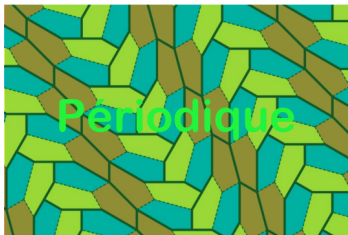
Pavages du plan euclidien



Pavages du plan euclidien



Pavages du plan euclidien



Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (la “*tuile fondamentale*”)

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (*la "tuile fondamentale"*)
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ (*les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale*)

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (la "tuile fondamentale")
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout γ (une tuile "touche" un nombre fini d'autres tuiles)

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (la "tuile fondamentale")
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout γ (une tuile "touche" un nombre fini d'autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{E}^2$ (les tuiles recouvrent le plan euclidien)

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (la “*tuile fondamentale*”)
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout γ (une tuile “*touche*” un nombre fini d’autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{E}^2$ (les tuiles recouvrent le plan euclidien)

Le pavage est **périodique** si Γ est un **groupe**, i.e. pour tout $\gamma, \eta \in \Gamma$, $\gamma \circ \eta \in \Gamma$ et $\gamma^{-1} \in \Gamma$ (la transformation qui envoie une tuile sur une autre envoie toute tuile sur une autre tuile)

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (la "tuile fondamentale")
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout γ (une tuile "touche" un nombre fini d'autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{E}^2$ (les tuiles recouvrent le plan euclidien)



Théorème (Fedorov, 1891)



Théorème (Fedorov, 1891)

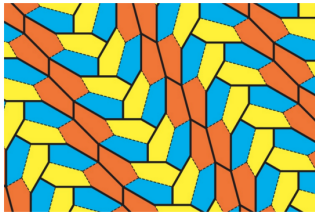
*Il existe 17 groupes de pavages du plan
Euclidien*



Théorème (Fedorov, 1891)

*Il existe 17 groupes de pavages du plan
Euclidien*

Mais ils sont “presque” les mêmes : ils
contiennent tous deux translations linéairement
indépendantes



Et en dimension supérieure ?

Un pavage du plan euclidien \mathbb{E}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^2$ fermé, borné (*la "tuile fondamentale"*)
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ (*les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale*)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout η (*une tuile "touche" un nombre fini d'autres tuiles*)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{E}^2$ (*les tuiles recouvrent le plan euclidien*)

Le pavage est **périodique** si Γ est un groupe, appelé **groupe de pavage**

Et en dimension supérieure ?

Un pavage de l'espace euclidien \mathbb{E}^n est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^n$ fermé, borné (la "tuile fondamentale")
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout η (une tuile "touche" un nombre fini d'autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{E}^n$ (les tuiles recouvrent l'espace euclidien)

Le pavage est **périodique** si Γ est un groupe, appelé **groupe de pavage**

Et en dimension supérieure ?

Théorème (Bieberbach, 1911)

Théorème (Bieberbach, 1911)

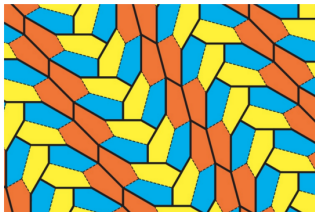
Soit $\Gamma \subset \text{Isom}(E^n)$ un groupe de pavage. Alors il existe $\mathbb{Z}^n \simeq \Gamma' \subset \Gamma$ engendré par n translations linéairement indépendantes. De plus, Γ/Γ' est fini.

Et en dimension supérieure ?

Théorème (Bieberbach, 1911)

Soit $\Gamma \subset \text{Isom}(E^n)$ un groupe de pavage. Alors il existe $\mathbb{Z}^n \simeq \Gamma' \subset \Gamma$ engendré par n translations linéairement indépendantes. De plus, Γ/Γ' est fini.

Boring...



Poincaré, *La Science et l'hypothèse*

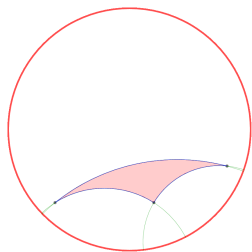




Poincaré, *La Science et l'hypothèse*
« Supposons [...] un monde renfermé dans une grande sphère [...] : La température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne [...] Dans ce monde, tous les corps [ont] même coefficient de dilatation [...] Si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants. Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher de la sphère limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. »

Le plan hyperbolique

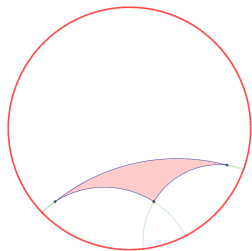
$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$



Le plan hyperbolique

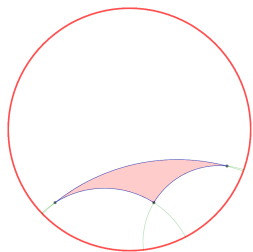
$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

$$\text{Longueur}(c) = \int_0^1 \frac{2|c'(t)|}{1-|c(t)|^2}$$



Le plan hyperbolique

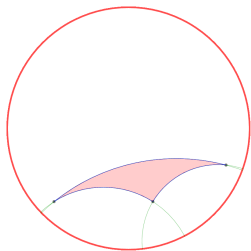
$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$



Longueur(c) = $\int_0^1 \frac{2|c'(t)|}{1-|c(t)|^2}$ **Distance :**
 $d(x, y) = \inf\{\text{Longueur}(c), c(0) = x, c(1) = y\}$

Le plan hyperbolique

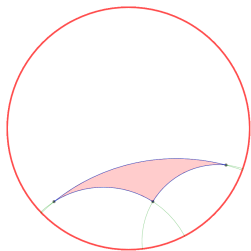
$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$



Longueur(c) = $\int_0^1 \frac{2|c'(t)|}{1-|c(t)|^2}$ **Distance :**
 $d(x, y) = \inf\{\text{Longueur}(c), c(0) = x, c(1) = y\}$

Isométrie : $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ tel que
 $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

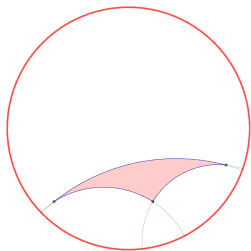


Longueur(c) = $\int_0^1 \frac{2|c'(t)|}{1-|c(t)|^2}$ **Distance :**
 $d(x, y) = \inf\{\text{Longueur}(c), c(0) = x, c(1) = y\}$

Isométrie : $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ tel que
 $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$

Segments, droites, angles, triangles, aires...

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$



Longueur(c) = $\int_0^1 \frac{2|c'(t)|}{1-|c(t)|^2}$ **Distance :**
 $d(x, y) = \inf\{\text{Longueur}(c), c(0) = x, c(1) = y\}$

Isométrie : $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ tel que
 $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$

Segments, droites, angles, triangles, aires...

Proposition

$$\text{Aire}(\text{triangle}) = \pi - \sum \text{angles} .$$

Pavages hyperboliques : définition

Un pavage de l'espace euclidien \mathbb{E}^n est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{E}^n$ fermé, borné (la "tuile fondamentale")
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout η (une tuile "touche" un nombre fini d'autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{E}^n$ (les tuiles recouvrent l'espace euclidien)

Le pavage est **périodique** si Γ est un groupe, appelé **groupe de pavage**

Pavages hyperboliques : définition

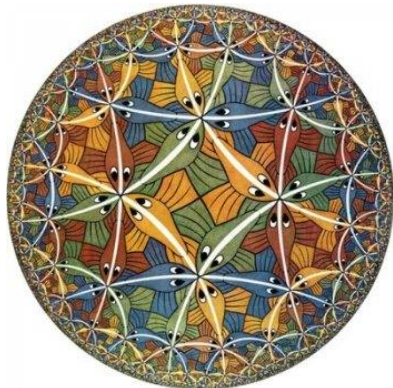
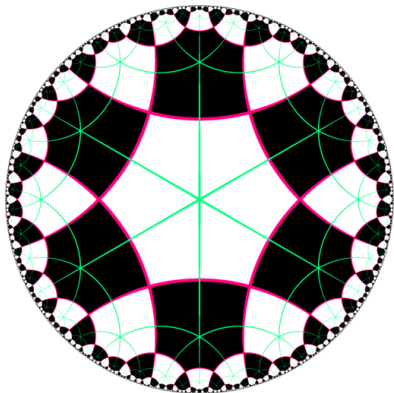
Un pavage du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{H}^2$ fermé, borné (la “*tuile fondamentale*”)
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout η (une tuile “*touche*” un nombre fini d’autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{H}^2$ (les tuiles recouvrent le plan hyperbolique)

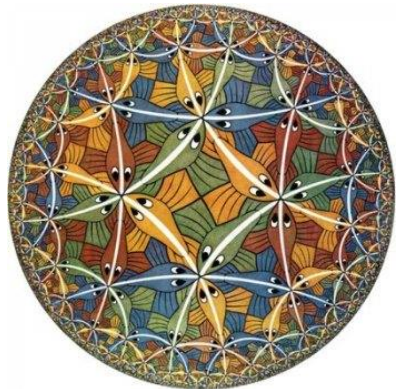
Le pavage est **périodique** si Γ est un groupe, appelé **groupe de pavage**



M.C. Escher, *Circle limit III*, 1969

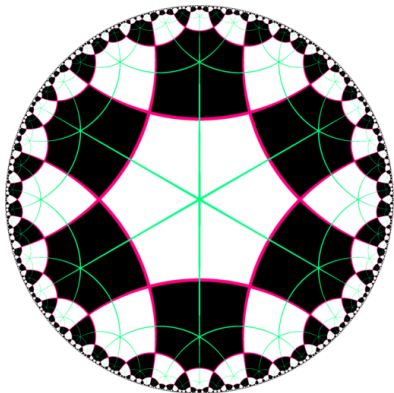
Coxeter, *the Trigonometry of Escher's woodcut "Circle limit III"*

Les courbes blanches **ne sont pas** des droites !



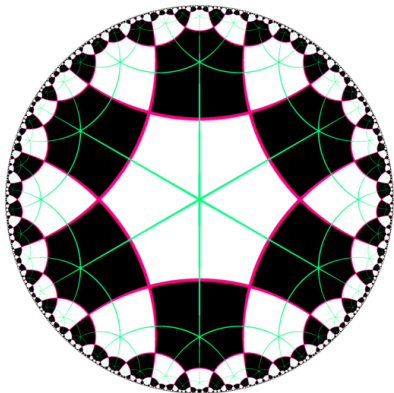
M.C. Escher, *Circle limit III*, 1969

Comment fabriquer ces pavages ?



Poincaré

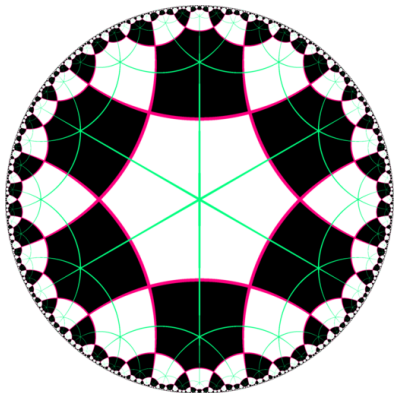
Comment fabriquer ces pavages ?



Poincaré

Prenez un polygone
(hyperbolique) avec des angles
 π/p , p entier.

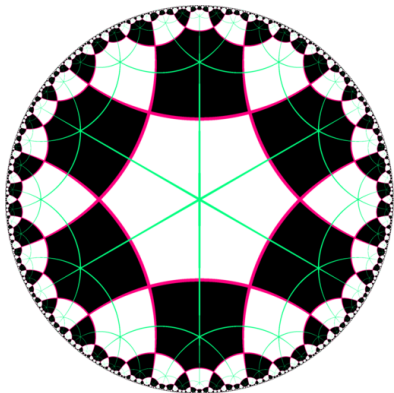
Comment fabriquer ces pavages ?



Poincaré

Prenez un polygone (hyperbolique) avec des angles π/p , p entier. Réféchissez-le sur ses côtés.

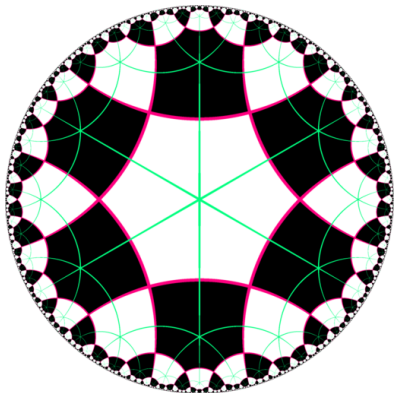
Comment fabriquer ces pavages ?



Poincaré

Prenez un polygone (hyperbolique) avec des angles π/p , p entier. Réflechissez-le sur ses côtés. Répétez.

Comment fabriquer ces pavages ?



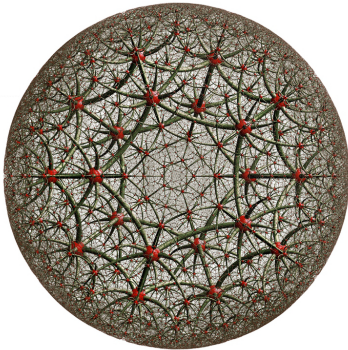
Poincaré

Prenez un polygone (hyperbolique) avec des angles π/p , p entier. Réfécissez-le sur ses côtés. Répétez.

Corollaire : Beaucoup de pavages hyperboliques, flexibilité, les groupes de pavage sont plus compliqués d'un point de vue algébrique.

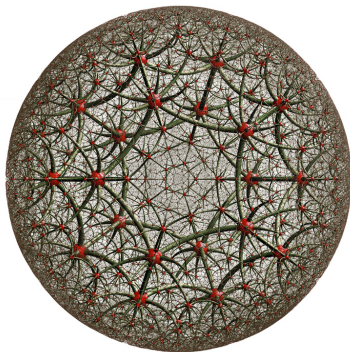
Et en dimension supérieure ?

La construction de Poincaré se généralise en “petite” dimension



Et en dimension supérieure ?

La construction de Poincaré se généralise en “petite” dimension

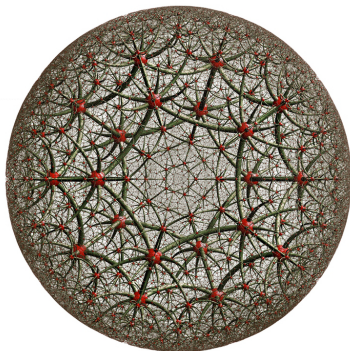


Théorème (Vinberg)

En dimension supérieure à 30, il n'y a plus de polytopes hyperboliques avec des angles dièdres divisant π .

Et en dimension supérieure ?

La construction de Poincaré se généralise en “petite” dimension



Théorème (Vinberg)

En dimension supérieure à 30, il n'y a plus de polytopes hyperboliques avec des angles dièdres divisant π .

Mais il existe d'autres constructions de pavages en toute dimension.

Le programme d'Erlangen (1872)

Le programme d'Erlangen (1872)



Felix Klein
(1849–1925)





Felix Klein
(1849–1925)

*« Als Verallgemeinerung der Geometrie entsteht so das folgende umfassende Problem : Es ist eine **Mannigfaltigkeit** und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben ; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden. »*



Felix Klein
(1849–1925)

« Comme généralisation de la Géométrie se pose ainsi la question générale que voici : Étant données une **variété** et un groupe de transformations de cette **variété**, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe. »



Felix Klein
(1849–1925)

« Comme généralisation de la Géométrie se pose ainsi la question générale que voici : Étant données une **variété** et un groupe de transformations de cette **variété**, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe. »

Ce qu'on en a retenu : la géométrie est l'étude des propriétés d'un espace X muni d'un groupe (continu, transitif) de transformations G .

Un pavage du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 est la donnée de :

- $F \subset \mathbb{H}^2$ fermé, borné (la “*tuile fondamentale*”)
- $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ (les *identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale*)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout η (une tuile “*touche*” un nombre fini d’autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = \mathbb{H}^2$ (les tuiles recouvrent le plan hyperbolique)

Le pavage est **périodique** si Γ est un groupe, appelé **groupe de pavage**

Pavages : définition générale

Un pavage de l'espace X est la donnée de :

- $F \subset X$ fermé, borné (la "tuile fondamentale")
- $\Gamma \subset G$ (les identifications des autres tuiles avec la tuile fondamentale)

tels que :

- $\{\eta \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap \eta(F) \neq \emptyset\}$ est fini pour tout η (une tuile "touche" un nombre fini d'autres tuiles)
- $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F) = X$ (les tuiles recouvrent l'espace X)

Le pavage est **périodique** si Γ est un groupe, appelé **groupe de pavage**

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2$$

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

est un “groupe continu de transformations” qui agit transitivement sur

$$\{x \mid Q(x) = 1\} =$$

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

est un “groupe continu de transformations” qui agit transitivement sur

$$\{x \mid Q(x) = 1\} = \mathbb{S}^n$$



$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

est un “groupe continu de transformations” qui agit transitivement sur

$$\{x \mid Q(x) = -1\} =$$

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

est un “groupe continu de transformations” qui agit transitivement sur

$$\{x \mid Q(x) = -1\} = \mathbb{H}^n$$



$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in \text{GL}(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

est un “groupe continu de transformations” qui agit transitivement sur

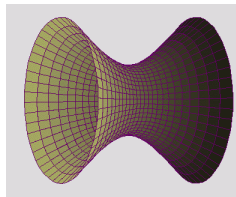
$$\{x \mid Q(x) = -1\} =$$

$$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q+1}^2$$

$$O(Q) = \{g \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid Q \circ g = Q\}$$

est un “groupe continu de transformations” qui agit transitivement sur

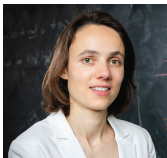
$$\{x \mid Q(x) = -1\} = \mathbb{H}^{p,q}$$



Peut-on paver les espaces pseudo-hyperboliques ?

Peut-on paver les espaces pseudo-hyperboliques ?

le cas $\mathbb{H}^{2,1}$ (Kassel 2010, T. 2017)

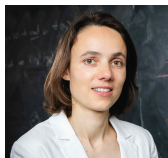


Fanny Kassel

Peut-on paver les espaces pseudo-hyperboliques ?

le cas $\mathbb{H}^{2,1}$ (Kassel 2010, T. 2017)

On comprend bien les groupes de pavages de $\mathbb{H}^{2,1}$. Ils sont liés aux pavages du plan hyperbolique.

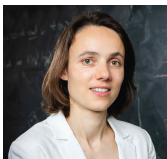


Fanny Kassel

Peut-on paver les espaces pseudo-hyperboliques ?

le cas $\mathbb{H}^{2,1}$ (Kassel 2010, T. 2017)

On comprend bien les groupes de pavages de $\mathbb{H}^{2,1}$. Ils sont liés aux pavages du plan hyperbolique.



Fanny Kassel

Théorème (Kassel–Morita–T.
2025)



Yosuke
Morita

Peut-on paver les espaces pseudo-hyperboliques ?

le cas $\mathbb{H}^{2,1}$ (Kassel 2010, T. 2017)

On comprend bien les groupes de pavages de $\mathbb{H}^{2,1}$. Ils sont liés aux pavages du plan hyperbolique.



Fanny Kassel

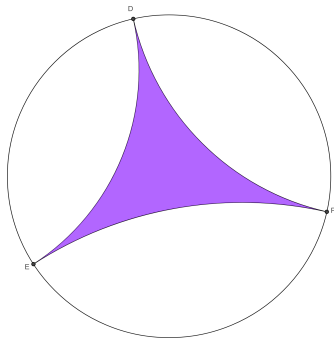
Théorème (Kassel–Morita–T.
2025)

*Si p n'est pas multiple de $2^{\frac{q-1}{2}}$,
alors $\mathbb{H}^{p,q}$ n'a pas de pavage
périodique*



Yosuke
Morita

Happy



day!